Przykłady zagadnień początkowych Cauchy’ego

Zbigniew Jan Stebel

Poniżej podamy kilka przykładów rozwiązań równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami brzegowymi. Tego typu zagadnienia nazywamy zagadnieniami początkowymi Cauchy'ego. Przykłady te można traktować jedynie jako wstęp do studiowania teorii równań różniczkowych. Rozwiązania poniższe nie wyczerpują wszystkich metod znanych w analizie matematycznej.

Zagadnienie 1.

Sprawdzić, że funkcja uwikłana zadana równaniem $x^2 + y^2 = 1$ oraz spełniająca warunek $y(0) = 1$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego $\begin{cases} x + yy' = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Sprawdzenie:

Z równania $x^2 + y^2 = 1$ mamy $y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$. Z pierwszego równania $y(0) = 1$.

Niech $y(x) = \sqrt{1-x^2}$. Wtedy $y'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Podstawiając funkcję i jej pochodną do równania z zagadnienia Cauchy'ego otrzymujemy

$$L = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = x - x = 0 = P.$$

Zagadnienie 2.

Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \cos(x)y = \cos(x)y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{dx} = (y^3 + y)\cos(x)$$

$$\frac{dy}{y^3 + y} = \cos(x)dx.$$

Całkując obustronnie otrzymujemy

(1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y(y^2+1)} = -\sin(x) + C_2.$

Rozkład:

$$\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1} \Rightarrow 1 = A(y^2+1) + (By+C)y = Ay^2 + A + By^2 + Cy =$$

$$= (A+B)y^2 + Cy + A.$$

Zatem porównując stronami otrzymamy: $A = 1, B = -1, C = 0.$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y(y^2+y)} = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{ydy}{y^2+1} = \ln(y) - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C_1.$ Podstawiając do równania (1) mamy: $\ln(y) - \ln\sqrt{y^2+1} + C_1 = -\sin(x) + C_2.$

Z własności logarytmów $\ln \dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}} = -\sin(x) + C_3$, gdzie $C_3 = C_2 - C_1.$

$$e^{\ln\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}} = e^{-\sin(x)+C_3} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = e^{-\sin(x)+C_3} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{Y^2+1}} = Ce^{-\sin(x)}.$$

Z faktu, że $y(0)=1$ wynika, że $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ostatecznie $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = e^{-\sin(x)}$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego.

Zagadnienie 3.

Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego: $\begin{cases} y''' + y' = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1. \end{cases}$

Rozwiązanie

Jest to równanie niejednorodne rzędu trzy.

Transformując obustronnie powyższe równanie i podstawiając do równania wyjściowego otrzymamy równanie algebraiczne postaci:

$s^3Y - 1 + sY = \frac{1}{s^2}, s > 0.$ Wyznaczamy transformatę Y(s)=Y:

$$Y(s^3+s) = \frac{1}{s^2} + 1 = \frac{s^2+1}{s^2} \Rightarrow Y = \frac{s^2+1}{s^2(s^3+s)} \Rightarrow Y = \frac{1}{s^3}.$$

Transformując obustronnie transformatą odwrotną równanie $Y=\frac{1}{s^3}$ otrzymujemy oryginał postaci $y=\frac{1}{2}x^2$ czyli rozwiązanie zagadnienia.

Zagadnienie 4.

Rozwiązać równanie postaci $y''' + 4y' + 5y = 0$ przy warunku początkowym $y(0) = -3, y'(0) = 0$

Rozwiązanie:

Jest to równanie jednorodne rzedu dwa.

Równanie charakterystyczne ma postać $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$

Liczymy pierwiastki tego równania:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -2+i \\ -2-i \end{cases}$$

Otrzymujemy układ fundamentalny rozwiązań postaci: $\begin{cases} y_1(t) = e^{-2t}\cos t \\ y_2(t) = e^{-2t}\sin t \end{cases}$

Zatem rozwiązanie równania przyjmuje postać ogólną: $y = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{-2t}$

Korzystając z twierdzenia o pochodnej iloczynu liczymy pierwszą funkcji

$$y' = (-C_1\sin t + C_2\cos t)e^{-2t} - 2(C_1\cos t + C_2\sin t)e^{-2t}$$

$$y' = (-C_1\sin t + C_2\cos t - 2C_1\cos t - 2C_2\sin t)e^{-2t}$$

Korzystając z warunków początkowych mamy:

$$y(0) = C_1 = -3$$

$$y'(0) = C_2 - 2C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 2C_1 \Rightarrow C_2 = -6.$$

Podstawiając wyznaczone stałe do postaci ogólnej otrzymujemy rozwiązanie w postaci $y=(-3\cos t-6\sin t)e^{-2t}$.

<u>Zagadnienie 5.</u>

Znaleźć rozwiązanie $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ zagadnienia: $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, jeśli $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>Rozwiązanie:</u>

Wielomian charakterystyczny macierzy $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ wynosi:

$W(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)^2+2=\lambda^2+2\lambda+3.$ Rozwiązując równanie o

czyli wartości własne wielomianu charakterystycznego wynoszą $\begin{cases} \lambda_1=-1+\sqrt{2}i \\ \lambda_2=-1-\sqrt{2}i. \end{cases}$

Szukamy wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym tego wielomianu:

$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & -1 \\ 2 & -\sqrt{2}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ stąd $v_2=-\sqrt{2}i, v_1=1.$ Zatem współrzędne wektora

wynoszą $v=\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Szukamy rozwiązań szczegółowych tworzących fundamentalny układ rozwiązań równania wyjściowego:

$$e^{-t}(\cos\sqrt{2}t+i\sin\sqrt{2}t)\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix} \cos\sqrt{2}t+i\sin\sqrt{2}t \\ -i\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-t}\cos\sqrt{2}t \\ e^{-t}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ -e^{-t}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}.$$

Równania szczegółowe mają postać:

$$x=\Re(e^{-t}(\cos\sqrt{2}t+i\sin\sqrt{2}t)\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} e^{-t}\cos\sqrt{2}t \\ e^{-t}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \end{bmatrix}$$

$$y=\Im(e^{-t}(\cos\sqrt{2}t+i\sin\sqrt{2}t)\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ -e^{-t}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową rozwiązań szczegółowych, zatem otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1e^{-t}\cos\sqrt{2}t+C_2e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}C_1e^{-t}\sin\sqrt{2}t-\sqrt{2}C_2e^{-t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}.$$

Korzystając z warunków brzegowych otrzymujemy:

$\begin{matrix} x(0)=C_1=1 \\ y(0)=-\sqrt{2}C_2=1, \end{matrix}$ Skąd $C_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-t}\cos\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t+e^{-t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}.$$

Zagadnienie 6.

Rozwiązać zagadnienie początkowe:
$y' + 2y = 0, y(0) = 1.$

Rozwiązanie:

Metoda pierwsza

Jest to równanie jednorodne rzędu jeden, postaci $y' + p(t)y = 0.$

Zatem ze wzoru $y = C\exp(-\int p(t)dt)$ otrzymujemy postać ogólną rozwiązania $y = C\exp(-\int 2dt) = C\exp(-2t) = Ce^{-2t}$. Z warunku brzegowego $y(0) = C = 1,$ czyli rozwiązaniem zagadnienia jest funkcja: $y = e^{-2t}.$

Metoda druga

$\frac{dy}{dt} = -2y, \frac{dy}{y} = -2dt,$ całkując obustronnie

otrzymujemy: $\ln(y) + C_1 = -2t + C_2 \Rightarrow \ln(y) = -2t + C_3,$ gdzie $C_3 = C_2 - C_1.$

Z definicji logarytmu $y = e^{-2t+C_3} = Ce^{2t}$, gdzie $C = e^{C_3}$. Warunek brzegowy rozwiązujemy analogiczne.

Metoda trzecia

Transformując obustronnie równanie otrzymujemy:
$sY - 1 + 2Y = 0,$ gdzie $Y = Y(s)$ jest transformatą równania różniczkowego.

Z równania mamy: $(s+2)Y = 1 \Rightarrow Y = \frac{1}{s+2}$. Transformujemy obustronnie ostatnią równość transformatą odwrotną otrzymując oryginał postaci: $f(t) = e^{-2t}$, czyli rozwiązanie zagadnienia początkowego.

Metoda czwarta

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} t^n.$

Podstawiając odpowiednie wielomiany do równania wyjściowego otrzymujemy:
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n = -2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Z porównania współczynników tego równania otrzymujemy:

$(n+1)a_{n+1} = -2a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{-2a_n}{n+1}$. Z postaci wielomianu i warunków brzegowych wynika, że $a_0 = 1$. Szukamy rozwiązania tej rekurencji:

$$a_1 = \frac{(-2)}{1} = -2$$
$$a_2 = \frac{(-2)\cdot(-2)}{2\cdot 1} \qquad \Rightarrow a_n = \frac{(-2)^n}{n!} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}t^n.$$
$$a_3 = \frac{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

……………………………

Zatem $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2t)^n}{n!} = e^{-2t}.$

<u>Zagadnienie 7.</u>

Znaleźć rozwiązanie zagadnienia: $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = 0, y'(0) = -1.$

Rozwiązanie:

Transformując obustronnie równanie różniczkowe otrzymujemy równanie algebraiczne postaci:

$s^2Y + s - sY + 4Y = \dfrac{1}{s-2}$, gdzie $Y = Y(s)$ jest transformatą funkcji y.

Otrzymujemy kolejno: $(s^2 - s + 4)Y = \dfrac{1}{s-2} \Rightarrow \dfrac{1}{(s-2)(s^2-s+4)}$.

Transformata odwrotna z funkcji $Y = \dfrac{1}{(s-2)(s^2-s+4)}$ będzie szukanym rozwiązaniem.

$$Y = \frac{1}{(s-2)(s^2-s+4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2-s+4}.$$

$$1 \equiv A(s^2 - s + 4) + (Bs + C)(s-2) = As^2 - As + 4A + Bs^2 - 2Bs + Cs - 2C$$

$$1 \equiv (A+B)s^2 + (C - 2B - A)s + (4A - 2C).$$

Porównując strony tego równania otrzymamy układ równań współczynnikowych postaci:

$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B + C = 0 \Rightarrow^{1} B = -A \\ 4A - 2C = 1 \end{cases}$ i podstawiając do równań (2) i (3) otrzymujemy:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 4A - 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 2C = 0 \\ 4A - 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Zatem $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$. Transformata równania przyjmuje postać:

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2-s+4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2-s+4}$$

Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy mamy: $s^2 - s + 4 = (s - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}$

$$\frac{s}{s^2-s+4} = \frac{s - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}} = \frac{s - \frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}}$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s - \frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}}$$

Transformata odwrotna tego równania wynosi:

$y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{15}e^{\frac{1}{2}t}\sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$, czyli jest funkcją będącą rozwiązaniem zagadnienia.

Zagadnienie 8

Rozwiązać zagadnienie początkowe:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+y=0,\ y'(1)=y(1)=1.$$

Rozwiązanie:

Jest to równanie Eulera jednorodne rzędu dwa.

Niech $t=e^r \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\frac{dy}{dr}}{\frac{dt}{dr}}=\dfrac{\frac{dy}{dr}}{e^r}=e^{-r}\dfrac{dy}{dr} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{\frac{d^2y}{dr^2}e^{-r}-\frac{dy}{dr}e^{-r}}{e^r}=e^{-2r}\left(\dfrac{d^2y}{dr^2}-\dfrac{dy}{dr}\right)$

Podstawiając do równania wyjściowego $t,\dfrac{dy}{dt},\dfrac{d^2y}{dt^2}$ otrzymamy:

$$e^{2r}e^{-2r}\left(\frac{d^2y}{dr^2}-\frac{dy}{dr}\right)+e^re^{-r}\frac{dy}{dr}+y=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dr^2}-\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dr}+y=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dr^2}+y=0.$$

Otrzymaliśmy równanie jednorodne rzedu dwa o stałych współczynnikach. Jego równanie charakterystyczne ma postać: $\lambda^2+1=0,$ zaś pierwiastki wynoszą odpowiednio $\lambda_1=-i,\lambda_2=i.$ Zatem istnieją dwa rozwiązania szczegółowe postaci:

$\begin{cases} y_1=\cos r \\ y_2=\sin r \end{cases}$ tworzące fundamentalny układ rozwiązań rozpatrywanego równania jednorodnego. Rozwiązanie ogólnym równania jest $y=C_1\cos r+C_2\sin r.$ Zamieniając zmienne otrzymujemy: $y=C_1\cos\ln t+C_2\sin\ln t.$

Pochodna wynosi $y'=-\frac{1}{t}C_1\sin\ln t+\frac{1}{t}C_2\cos\ln t.$ Korzystając z warunków początkowych otrzymujemy: $y(1)=C_1=1, y'(1)=C_2=1,$ czyli rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego jest funkcja $y=\cos\ln t+\sin\ln t.$